

研究ノート

物理計算ソフト FisicaLab の
解法についての一考察

翁 長 朝 英

要約 物理計算ソフトである FisicaLab の計算方法について、物理学的観点から考察した。FisicaLab では、アイコン操作と数値の設定だけで、物理の問題を解くことができる。これは、問題を解くのに必要な運動方程式などがあらかじめプログラムに組み込まれ、計算が行われるためである。本稿では、具体的な問題を取り上げ、問題に必要な運動方程式について、またこれらの式とプログラムとの対応について考察している。

キーワード：物理計算, FisicaLab, Objective-C

はじめに

FisicaLab¹⁾は物理の問題を解くための教育用ソフトである。このソフトは、物理の概念の理解に重点が置かれている。このため、初学者が数学的な煩わしさから、物理を敬遠する事が無いように配慮され、運動方程式などの物理の式は、表には一切出てこない。問題を解く操作も簡単であり、画面上にあるアイコンを選択し、問題の数値等を設定して、決定ボタンを押すだけで問題を解くことができる。

FisicaLab は導入用ソフトであり、2次元の運動しか扱えないが、質点の運動、回転運動、静力学、拘束運動などの力学の問題と、熱力学の問題など、様々な問題を扱うことができる。

1) FisicaLab <http://www.nongnu.org/fiscalab/>

このソフトは、Objective-C 言語で記述されており、Mac の OS X や GNUstep 環境をインストールした Windows や Linux 等の PC-UNIX 上で利用可能である。現在のバージョンは 0.3.2 であり、まだ開発版である。

本稿では、ユーザマニュアルにある例題を取り上げ、問題解法に利用される運動方程式とその解き方について、物理学的観点から考察する。また、FisicaLab では、これらの式はプログラム内に記述されており、これらのプログラム文との対応についても考察する。

I FisicaLab

1 画面構成

FisicaLab ソフトは、図 1 に示した二つのウィンドウで構成されている。モジュールウィンドウ (Modules and elements, 図 1 (a)) とチョークボード (chalk-

図 1 (a) モジュールウィンドウ

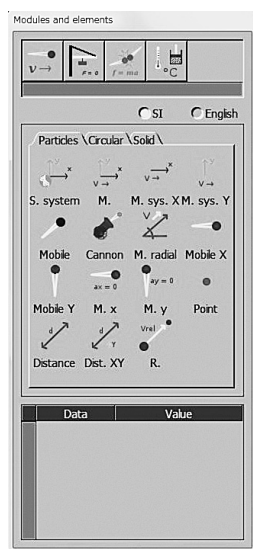


図 1 (b) チョークボード

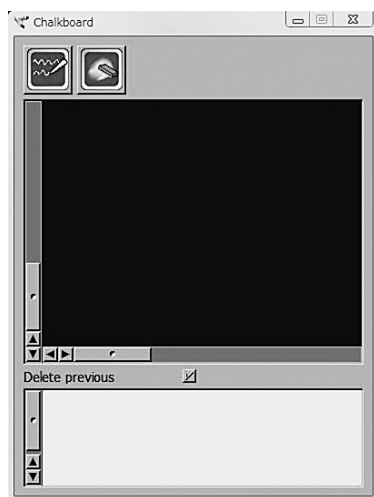
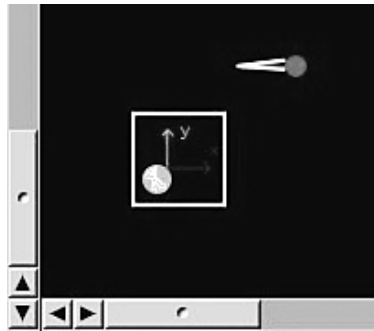


図2 チョークボード



board, 図1(b))である。

モジュールウィンドウには、利用できるモジュールとそのエレメントが表示されている。その上部には左から運動学 (Kinematics), 静力学 (Statics), 動力学 (Dynamics), 熱力学 (Thermodynamics) のモジュールアイコンが並んでおり、ここで利用するモジュールを選択する。モジュールを選択すると、そのモジュールで利用できるエレメントがその下に表示される。

図1(a)は運動学モジュールのエレメントを表示しているが、これはさらに質点 (Particles), 円 (Circular), 剛体 (solid) グループから構成され、それぞれ質点の並進運動, 回転運動と剛体の運動を扱うことができる。

チョークボードは、問題を解くのに必要なエレメントを貼り付ける場所である。モジュールウィンドウから、アイコンをクリックして簡単に貼り付けることができる。図2にエレメントのアイコンを貼り付けたチョークボードの例が示してある。

2) FisicaLab ユーザマニュアル <http://download.savannah.gnu.org/release/fiscalab/fiscalab-doc-en.tar.gz> (pdf ファイル)

2 問題解法の操作

この節では、マニュアルの3.1節（Example 1）³⁾にある問題を例に，FisicaLab による問題の解法について述べる。

これは質点の並進運動に関する問題で，一台の車が 3m/s^2 の加速度で東の方向（X の方向）に出発したとき，7 秒後の速さ（km/h）と移動距離（m）を求める問題である。

まず，運動学モジュールの質点グループ内のエレメントの中から，静止座標系（Stationary reference system）エレメントと X 方向に運動する質点（Mobile in X）エレメントのアイコンをチョークボードに貼り付ける（図 2）。次に，これらの各エレメントに既知量や未知量を設定する。設定すべき量は，各エレメントによって決まっている。この問題の場合，次の量を設定しなければならない。

表 1 エレメントの設定項目（Example1）

静止座標系エレメント	
tf :	運動終了時の時間
X 方向に運動する質点エレメント	
Name :	エレメントの名前
ax :	加速度
xi :	運動開始時の X 座標
vxi :	運動開始時の速さ
ti :	運動開始時の時間
xf :	運動終了時の X 座標
vxf :	運動終了時の速さ

次章で考察しているように，問題を解く場合には，運動方程式などの運動の式を使用する。これらの式は，連立方程式として解かれるので，式の数と未知

3) FisicaLab ユーザマニュアル（前掲）p.20

表2 エLEMENTの設定 (Example1)

静止座標系ELEMENT	
tf:	7
X 方向に運動する質点ELEMENT	
Name:	Car (ここでは, 名前は問題と関係ない。)
ax:	3
xi:	0
vxi:	0
ti:	0
xf:	d
vxf:	vf @ km/h

量の数と同じ数でなければならない。各ELEMENTの式の数マニュアルに記載されている。この問題では、静止座標系ELEMENTの式の数0で、質点ELEMENTの式の数2であり、総計2である。従って、未知量に2つの量を取らなければならない。求める量は、7秒後の速さと移動距離なので、この2つの量を未知量に取る。運動の開始時の時間を0とし、その時質点は座標の原点で静止しているものとする、これらのELEMENTで設定すべき量は、表2のようになる。vfとdが2つの未知量で、7秒後の速さと移動距離である。

使用する数値は、標準でMKS単位系(SI)が使われ、時間、長さ、重さはs, m, kgの単位になっている。また、English単位系もあり、この系では長さの単位にft(フィート)が使われる。単位の換算も自動的に行われ、速さを時速で求めたい時には、上記のように数値の後ろに“@ km/h”を追加する。数値の設定は、モジュールウィンドウの下段のテーブルで行う。設定後のテーブルの状態を図3に示す。

この様にして、各ELEMENTと数値の設定の後、問題を解くことができる。答えを得るには、チョークボードの上にある「Solve」アイコンをクリックするだけである。問題の答えが、チョークボードの下段に表示される。結果を図

図3 静止座標系エレメント（上）と質点エレメント（下）の値の設定

Data	Value
tf	7

Data	Value
Name	Car
ax	3
xi	0
vxi	0
ti	0
xf	d
vxf	vf @ km/h

図4 計算結果

d = 73.500 m ; vf = 75.600 km/h ; Status = success.
--

4 に示してある。7 秒後の速さと移動距離が，以下のように得られている。

$$vf = 75.600 \text{ km/h}; \quad d = 73.500 \text{ m}$$

最後の行にある「Status = success」は，計算が正しく行われたことを示している。各エレメントに指定された式の数と未知量の数が異なる場合は，「The system is undetermined.」と表示され計算は行われない。

Ⅱ 考 察

前章で述べた FisicaLab の解法には運動方程式が利用されている。この章では、マニュアルにある 3 つの例題を取り上げ、どのような運動の式が利用されているか、物理学的観点から考察する。

1 質点の並進運動

1 つ目は、質点の並進運動の問題である。これは、前章で取り上げた問題で、一台の車が 3m/s^2 の加速度で東の方向に出発するとき、7 秒後の速さ (km/h) と移動距離 (m) を求める問題である。

この運動は、質点の加速度を a として、次の運動方程式から解かれる。東の方向を X 軸に取っている。

$$\ddot{x} = a \quad (1)$$

速さと移動距離は、これを積分して得られる。

$$\text{速さ: } v = \dot{x} = v_0 + at \quad (2)$$

$$\text{移動距離: } x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2 \quad (3)$$

初期条件は、 $t=0$ で $v_0=0$, $x_0=0$ (運動の開始時は、原点で静止) であるので、最終的な式として次式が得られる。

$$v = at, \quad x = \frac{1}{2}at^2 \quad (4)$$

これから、加速度の値を $a=3\text{m/s}^2$ として 7 秒後の速さ vf と移動距離 d は、

$$vf = 21\text{m/s} = 75.6\text{km/h}, \quad d = 73.5\text{m}$$

となる。

プログラムでは、この式は FLKinematics.m の 701 と 702 行目に記述されている。

リスト1 質点エレメントのプログラム

```

701: gsl_vector_set(func, nEcu, xi + vxi*(tf-ti) +
      0.5*ax*(tf-ti)*(tf-ti) - xf);
702: gsl_vector_set(func, nEcu + 1, vxi + ax*(tf-ti) - vxf);

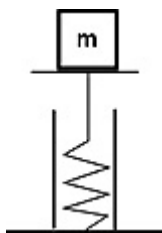
```

`gsl_vector_set()`は、数値計算ライブラリ GSL (GNU Scientific Library) の関数の一つである。この関数の第3引数が、運動の式であり、701行が移動距離の式、702行が速さの式に相当している。式の中の変数名は、エレメントに設定する項目の名前である。これから解るように、このエレメント (X方向に運動する質点) の持つ式の数 は2である。

2 静力学

2つ目は、静力学に関する問題を取り上げる。これは、マニュアルの7.7節 (Example 7)⁴⁾にある。図5に示してあるように、バネの上に未知の質量のブロックが置いてあり、ブロックの重さで、バネは自然長より5cm収縮している。このバネのバネ定数が150N/mであるとき、このブロックの質量 (g) はいくらであるか求める問題である。

図5 重りとバネ



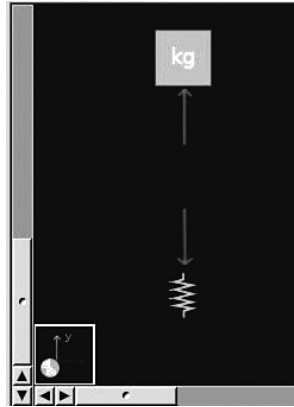
FisicaLab では、以下のようにしてこの問題を解く。まず、静力学モジュールの質点グループから、静止座標系、ブロック、バネ、力の各エレメントをチョークボードに貼り付ける。エレメントに設定された式の数 は、ブロックとバネが1、残りは0であるので、全体として2である。従って未知量は2つ指定する。問題から、ブロックの質量 (m) と力の大きさ (f) を未知量にする。これより、各エレメントの設定項目は表3のようになる。

4) FisicaLab ユーザマニュアル (前掲) p.76

表3 エLEMENTの設定 (Example7)

静止座標系	g: (重力加速度)	9.81
ブロック	m: (質量)	m @ g
バネ	k: (バネ定数)	150
	d: (バネの伸び)	-5 @ cm
力 (ブロック)	f (力の大きさ)	f
力 (バネ)	f	f

図6 チョークボード (Example7)

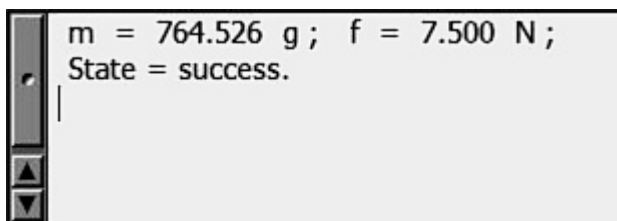


ブロックに作用する力とバネに作用する力は同じ値である。また、バネは収縮しているので負の値を設定する。チョークボードの様子と計算結果を、それぞれ図6と図7に示してある。

この問題は、バネと重りのつり合いの問題であり、ブロックに働く重力による力とバネの反発力がつり合っている。バネの自然長の長さを l 、つり合いの状態での長さを y 、バネ定数を k とすると、フックの法則により、バネの力 f は次式で与えられる。

$$f = k(l - y) \quad (5)$$

図7 計算結果 (Example7)



これがブロックに働く力とつり合っているので、ブロックの質量を m 、重力の加速度を g として、次式が得られる。

$$mg = k(l - y) \quad (6)$$

これより、 m の値が以下のように得られる。

$$m = \frac{k}{g}(l - y) = 0.7645 \text{ kg} = 764.5 \text{ g}$$

また、重りとバネに働く力 f は、

$$f = 7.50 \text{ N}$$

となる。

プログラムでは、この式は FLStatics.m の97, 105, 129行と1048行に記述されている (リスト2)。前者がブロックに関する式で、後者がバネに関する式である。式中の変数名は、 masa と gf がそれぞれエレメントの設定項目名の m と g , kr と d がそれぞれ k と d , そして fuerza が f に対応している。

リスト2 ブロックとバネエレメントのプログラム

```

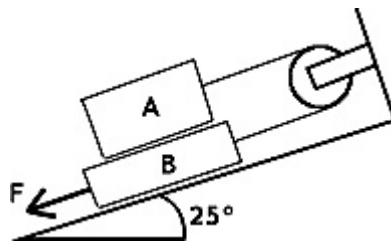
97 : peso = masa*gf ;
105 : fuerza = -1*peso;
129 : gsl_vector_set (func, nEcu, fuerza);
1048: gsl_vector_set (func, nEcu, kr*d - fuerza);

```

3 動力学

3つ目は、動力学に関する問題である。これは、マニュアルの11.11節 (Example 11)⁵⁾にある。図8に示してあるように、斜面上にブロックBがあり、その上にブロックAが乗っている。ブロックAとBは、斜面に固定された滑車に通した紐で結ばれている。ブロックAとBの質量は、それぞれ23kgと17kgであり、ブロックのそれぞれの面での摩擦係数は、すべて同じ値で0.18であるとする。ブロックBを235Nの力で斜面の下方に引いたとき、ブロックAの加速度とブロックを結ぶ紐の張力はいくらであるか求める問題である。

図8 斜面上のブロック



この問題は、FisicaLab では以下のようにして求める。使用するエレメントは、動力学モジュールの質点グループ内にある。ここから、静止座標系、左に傾斜したブロック、力、摩擦力、ブロック間の摩擦力、加速度間の関係の各エレメントをチョークボードに貼り付ける。

各エレメントの持つ式の数、ブロックが4、加速度間の関係が1、残りは0である。ブロックは2つあるので、全体の式の数、9である。各エレメントを表4のように設定する。

問題では、ブロックAの加速度と紐の張力を求めるようになっているが、未知量は9つ必要である。従って、これらを含めて、ブロックAの加速度 (a_A),

5) FisicaLab ユーザマニュアル（前掲）p.176

表 4 エレメントの設定 (Example11)

静止座標系	g: (重力加速度)	9.81
	t: (終りの時間)	0.5
ブロック A	Name: (名前)	A
	m: (質量)	23
	ang: (傾斜角)	25
	a: (加速度)	aA
	vi: (初めの速さ)	0
	vf: (終りの速さ)	vfA
	d: (移動距離)	dA
	Related to: (相対運動の基準)	sf (静止座標系)
ブロック A に作用する力		
力 (抗力)	f: (力の大きさ)	nA
	ang: (力の方向)	65
摩擦力 (ブロック間)	N: (抗力)	nA
	u: (摩擦係数)	0.18
	ang: (力の方向)	25
力 (紐の張力)	f:	t
	ang:	25
ブロック B	Name:	B
	m:	17
	ang:	25
	a:	aB
	vi:	0
	vf:	vfB
	d:	dB
	Related to:	sf
ブロック B に働く力		
力 (抗力)	f:	nB
	ang:	65
摩擦力	N: (抗力)	nB
	u: (摩擦係数)	0.18
摩擦力 (ブロック間)	N:	nA
	u:	0.18
	ang:	25
力 (紐の張力)	f:	t
	ang:	25
力 (A から受ける力)	f:	nA
	ang:	65
力 (外力)	f:	235
	ang:	25
加速度間の関係	a1: (加速度 1)	aA
	a2: (加速度 2)	aB
	z: (関係の値)	-1

終わりの速さ (v_fA)、移動距離 (dA)、ブロック B の加速度 (aB)、終わりの速さ (v_fB)、移動距離 (dB)、ブロック A に働く抗力 (nA)、ブロック B に働く抗力 (nB)、紐の張力 (t) を未知量として設定する。運動開始時はブロック A、B ともに原点で静止しているものとし、0.5 秒後の状態を計算する。チョークボードの様子と計算結果を、それぞれ図 9 と図 10 に示す。チョークボード上では、力は矢印で示されているが、通常の力、摩擦力、ブロック間の摩擦力は色分して区別している。

図 10 の実行結果において、ブロック B の加速度、終わりの速さ、移動距離が負の値になっている。これは、ブロック B が斜面の下方に向かって運動していることを示している。

図 9 チョークボード (Example11)

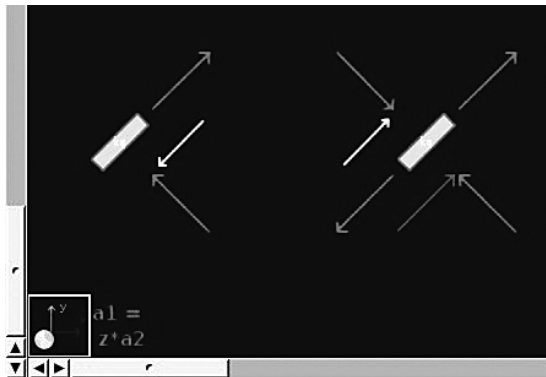


図 10 実行結果 (Example11)

```
nA = 204.490 N ; t = 173.848 N ; nB = 355.635 N ;
aA = 1.812 m/s2 ; aB = -1.812 m/s2 ; vfA = 0.906
m/s ; dA = 0.227 m ; vfB = -0.906 m/s ; dB =
-0.227 m ;
State = success.
```

FisicaLab では、斜面上を移動するブロックの問題は、斜面に沿って上側の方向を x 軸の正の方向、斜面に垂直で上の方向を y の正の方向とする座標系 (x, y) で解かれる。静止系の座標系 (X, Y) とこの座標系の関係は、次式で表される。 α は、静止系の X 軸と斜面の角度である。

$$X = x \cos \alpha - y \sin \alpha, \quad Y = x \sin \alpha + y \cos \alpha \quad (7)$$

(x, y) 座標系でのブロック A と B の重心の座標をそれぞれ (x_1, y_1) , (x_2, y_2) とすると、A, B の運動の式は以下ようになる。

$$\text{A: } m\ddot{x}_1 = t - f_1 - mg \sin \alpha, \quad m\ddot{y}_1 = R - mg \cos \alpha \quad (8)$$

$$\text{B: } M\ddot{x}_2 = t + f_2 + f_3 - F - Mg \sin \alpha, \quad M\ddot{y}_2 = N - R - Mg \cos \alpha \quad (9)$$

ここで、 m はブロック A の質量、 M はブロック B の質量、 g は重力の加速度、 R はブロック A に作用する抗力、 N はブロック B に作用する抗力である。また、 f_1 と f_2 は、ブロック間に作用する摩擦力である。前者がブロック A に、後者がブロック B に作用する。 f_3 はブロック B と斜面との間の摩擦力、 t は紐の張力、 F が外部からブロック B に作用する力である。

ブロック B は斜面に沿って、またブロック A はブロック B に沿って運動するので、 $\ddot{y}_1 = 0$, $\ddot{y}_2 = 0$ であり、次式が得られる。

$$R = mg \cos \alpha, \quad N = R + Mg \cos \alpha \quad (10)$$

これから、 m , g , $\cos \alpha$ ($\alpha = 25^\circ$), M のそれぞれの値を代入して、 R と N の値が以下のように得られる。

$$R = 204.49 \text{ N (nA に相当)}, \quad N = 355.63 \text{ N (nB に相当)}$$

また、摩擦力は次式のようにになっている。

$$f_1 = \mu R, \quad f_2 = \mu R, \quad f_3 = \mu N \quad (\mu = 0.18) \quad (11)$$

これから、 x 方向の運動の式は以下ようになる。

$$\text{A: } m\ddot{x}_1 = t - \mu R - mg \sin \alpha \quad (12)$$

$$\text{B: } M\ddot{x}_2 = t + \mu R + \mu N - F - Mg \sin \alpha \quad (13)$$

運動の条件（紐で結ばれた物体の運動）から、

$$\ddot{x}_1 = -\ddot{x}_2 \quad (14)$$

となるので、紐の張力 t は以下のように書ける。

$$t = \frac{1}{M+m} \{ (M-m)\mu R - m\mu N + mF + 2Mmg \sin \alpha \} \quad (15)$$

右辺のそれぞれの値を代入して、 t の値が得られる。

$$t = 173.84 \text{ N (t に相当)}$$

これらの値から、ブロック A とブロック B の加速度の値が得られる。

$$\ddot{x}_1 = \frac{1}{m} (t - \mu R - mg \sin \alpha) = 1.812 \text{ m/s}^2 \text{ (aA に相当)}$$

$$\ddot{x}_2 = -\ddot{x}_1 = -1.812 \text{ m/s}^2 \text{ (aB に相当)}$$

ブロック A と B の終わりの速さと移動距離は、加速度の式を積分して得られる。 $\ddot{x}_1 = a_1$, $\ddot{x}_2 = a_2$ として、以下ようになる。

$$\text{A: } v = v_0 + a_1 t, \quad x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_1 t^2 \quad (16)$$

$$\text{B: } v = v_0 + a_2 t, \quad x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_2 t^2 \quad (17)$$

運動の開始時 ($t=0$) は、ブロック A, B とともに原点で静止しているとする
と、この式は

$$\text{A: } v = a_1 t, \quad x = \frac{1}{2} a_1 t^2 \quad (18)$$

$$\text{B: } v = a_2 t, \quad x = \frac{1}{2} a_2 t^2 \quad (19)$$

となる。これより、運動終了時 ($t=0.5$) の速さと移動距離は、次のようになる。

$$\text{A: } v = 0.9061 \text{ m/s (vfA に相当)}$$

$x=0.2265\text{ m}$ (dA に相当)

B: $v=-0.9061\text{ m/s}$ (vfB に相当)

$x=-0.2265\text{ m}$ (dB に相当)

プログラムでは、これらに相当する式は、FLDynamics.m の1211行から1223行（左に傾斜したブロックエレメント）と1874行（加速度間の関係エレメント）に記述されている。

リスト3 ブロックエレメントと加速度間の関係エレメントのプログラム

```
1211: gsl_vector_set (func, nEcu, fuerzax - masa*(a +
      a_signox*a_rel*cos(M_PI*ang_rel/180)) );
1212: gsl_vector_set (func, nEcu + 1, fuerzay -
      masa*a_signoy*a_rel*sin(M_PI*ang_rel/180) );
1213: gsl_vector_set (func, nEcu + 2, 0.5*(vf*vf - vi*vi) - a*d);
1216: if( (a_status = 1) && (a == 0) )
1217: {
1218:   gsl_vector_set (func, nEcu + 3, vi*tf - d);
1219: }
1220: else
1221: {
1222:   gsl_vector_set (func, nEcu + 3, (vf - vi) - a*tf);
1223: }
```

```
1874: gsl_vector_set (func, nEcu, a_uno - z*a_dos);
```

前節と同様に、第3引数が運動の式であるが、このブロックエレメントでは、やや複雑な式になっている。これは、ブロックの運動が他のエレメントに対する相対運動として扱うことができるようになっているためである。リスト3の1211行と1212行にある a_{rel} と ang_{rel} が相対運動の基準となるエレメントの加速度とその方向を表している。

この例題では、ブロックAとBともに静止座標系を相対運動の基準にしているので、 $a_{rel}=0$, $ang_{rel}=0$ である。また、 a_{signox} と a_{signoy} は、ブロッ

クの加速度の方向を表している。ブロック A は斜面と平行で上方向に運動するので、 $a_{\text{signox}}=1$, $a_{\text{signoy}}=0$ であり、ブロック B は、斜面に沿って下方向に運動するので、 $a_{\text{signox}}=-1$, $a_{\text{signoy}}=0$ である。この問題では、 $a_{\text{rel}}=0$ であるので、これらの変数は問題に関与しない。

これらを考慮すると、プログラム文の第 3 引数の式は、次のようになる。

```
1211: fuerzax - masa*a
1212: fuerzay
```

これは、(8)式を変形した式に相当している。

$$(t - f_1 - mg \sin \alpha) - m \ddot{x}_1 = 0 \quad (20)$$

$$(R - mg \cos \alpha) - m \ddot{y}_1 = R - mg \cos \alpha = 0 \quad (\ddot{y}_1 = 0) \quad (21)$$

ブロック B についても同様である。

1874 行目は、加速度間の関係を表す式で(14)式に相当し、 $a_{\text{uno}}(a1)$, $a_{\text{dos}}(a2)$ が、それぞれ \ddot{x}_1 と \ddot{x}_2 を表している。また、 z は-1である。

おわりに

本稿では、物理計算用の教育ソフトである FisicaLab の問題解法について考察した。

ここでは、ユーザマニュアルにある例題を 3 題取り上げ考察したが、Linux と Windows 上では、正しい値で計算されない問題もいくつかある。この問題を解決するには、プログラムの詳細な検証が必要である。このソフトはまだ開発版であり、今後改善されていくであろう。

FisicaLab では、例えば質点の並進運動や回転運動などの問題を考える場合、これらの運動の各要素に対応するエレメントをチョークボードに貼り付け、そのエレメントに数値や未知量を設定して問題を解いている。この過程を通して、問題に必要な運動の各要素について、また各要素に必要な物理量について

考察することになる。これは、このソフトの目的である初学者に対する物理の概念の理解に十分役立つと思われる。

また、初学者のみならず、様々な状況において手早く計算結果を得たいときがある。FisicaLab は、このような場合でも大変有用なソフトである。

参考文献

1. FisicaLab ユーザマニュアル <http://download.savannah.gnu.org/release/fisicalab/fisicalab-doc-en.tar.gz> (pdf ファイル)
 2. 後藤憲一, 山本邦夫, 神吉 健「詳解 力学演習」共立出版, 2013
 3. 山内恭彦, 末岡清市「大学演習 力学」裳華房, 1974
- ・本論文に出てくる製品名等は、各社の商標および登録商標です。